

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ' Λυκείου
5ο Διαγώνισμα
Ύλη: έως όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

2025-2026

Θέμα

A1. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, με $x_0 \in \mathbb{R}$.

5 Μονάδες

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

3 Μονάδες

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > 0$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

1+3 Μονάδες

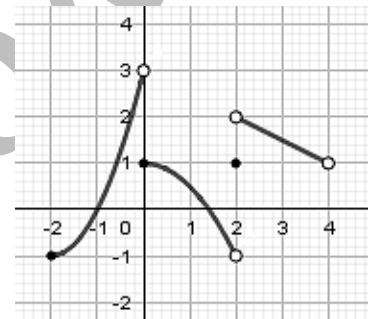
A4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε όσα από τα επόμενα όρια υπάρχουν:

α) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2+3 Μονάδες



A5. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm 1$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$.

δ) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$.

8 Μονάδες

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.

5 Μονάδες

B2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

6 Μονάδες

B3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}.$$

6 Μονάδες

B4. Έστω η συνάρτηση $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$.

8 Μονάδες

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός και στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 1, x \in \mathbb{R}.$$

2+4 Μονάδες

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο, του οποίου να βρείτε τη θέση.

5 Μονάδες

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x)+1)}{x}$.

7 Μονάδες

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu(f(x)+1) - 1 = f(x)$.

7 Μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x - x - 1, x \in [0, \pi]$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

3 Μονάδες

Δ2. Να λύσετε στο διάστημα $[0, \pi]$ την ανίσωση $\sin x < x + 1$.

5 Μονάδες

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x + \eta\mu x}$.

5 Μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

1+5 Μονάδες

Δ5. Να λύσετε στο $[0, \pi]$ την ανίσωση $\sin x \geq \ln(x+1) + x + 1$.

6 Μονάδες

Καλή τύχη!

Το Θέμα Β είναι Θέμα πανελλαδικών εξετάσεων

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

Θέμα Α

A1. Έστω $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \alpha_0 = \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0).$$

A2. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

A3.α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2, x \neq 0$. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, όμως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

A4. α) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$

β) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{δεν υπάρχει}$

A5. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ

Θέμα Β

B1. Είναι $A_f = A_g = \mathbb{R}$. $A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} / (x + \beta) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + \beta)^2 + \alpha = x^2 + 2\beta x + \beta^2 + \alpha.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2\beta x + \beta^2 + \alpha = x^2 - 2x \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\beta = -2 \\ \beta^2 + \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 1 + \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

B2. Είναι $f(x) = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$. Επειδή $1 \neq -1$ και $f(-1) = f(1) = 2$, η f δεν είναι 1-1.

Είναι $g(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$ άρα η g 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε $g(x) = y \Leftrightarrow x - 1 = y \Leftrightarrow x = y + 1$, άρα $g^{-1}(y) = y + 1, y \in \mathbb{R}$, οπότε $g^{-1}(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$.

B3. $A_{g^{-1} \circ f} = \{x \in A_f / f(x) \in A_{g^{-1}}\} = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 - 1) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = f(x) + 1 = x^2 - 1 + 1 = x^2, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } \varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)} = \sqrt{x^2} = |x| \text{ με}$$

$$A_\varphi = \{x \in A_{g^{-1} \circ f} / (g^{-1} \circ f)(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$$

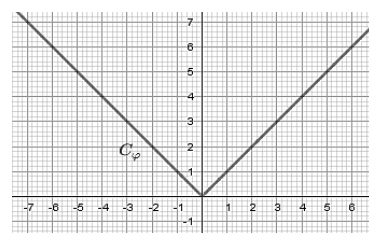
Η γραφική παράσταση της φ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

B4. i. Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 1 + 2 \leq h(x) \leq x - 1 + 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq h(x) \leq x + 1$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2, \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2.$$



ii. Θέτουμε $h(x) = u$. Όταν $x \rightarrow 1$ τότε $u \rightarrow 2$ αφού $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$ άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{\sqrt{u+7}-3}{u^2-4} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{u+7}-3)(\sqrt{u+7}+3)}{(u-2)(u+2)(\sqrt{u+7}+3)} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{u+7})^2-9}{(u-2)(u+2)(\sqrt{u+7}+3)} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 2} \frac{u+7-9}{(u-2)(u+2)(\sqrt{u+7}+3)} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{\cancel{u-2}}{(\cancel{u-2})(u+2)(\sqrt{u+7}+3)} = \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{24}$$

Θέμα Γ

Γ1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2(f(x) - x^4 + 2x^2)$

Επειδή το $2(f(x) - x^4 + 2x^2) \in \mathbb{R}$ ως πράξεις πραγματικών αριθμών, είναι και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$.

Τότε $f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}\lambda$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x^4 - 2x^2 + \frac{\lambda}{2} \right) \Leftrightarrow \lambda = 1 - 2 + \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda - \frac{\lambda}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda = -2, \text{ άρα}$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 1, x \in \mathbb{R}.$$

Γ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 2 = (x^2 - 1)^2 - 2$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 2 \geq -2 \Leftrightarrow f(x) \geq -2$ και

$$(x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow f(x) = -2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Η f έχει ελάχιστο το -2 για $x = 1$ και $x = -1$.

Γ3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x)+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x^4 - 2x^2 - 1 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x^4 - 2x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x^4 - 2x^2)}{x^4 - 2x^2} \cdot \frac{x^4 - 2x^2}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x^4 - 2x^2)}{x^4 - 2x^2} \cdot \frac{\cancel{x}(x^3 - 2x)}{\cancel{x}} = 1 \cdot 0 = 0 \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x^4 - 2x^2)}{x^4 - 2x^2} \stackrel{x^4 - 2x^2 = \omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$$

Γ4. $\eta\mu(f(x)+1) - 1 = f(x) \Leftrightarrow \eta\mu(f(x)+1) = f(x) + 1 \quad (1)$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x| \leq |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα η (1) έχει λύση

$$\text{μόνο όταν } f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0) \text{ ή } (x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2})$$

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, \pi]$ με $x_1 < x_2$ είναι $\sin x_1 > \sin x_2 \quad (1)$, $-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow -x_1 - 1 > -x_2 - 1 \quad (2)$ και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow [0, \pi]$.

$$\text{Για κάθε } 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow f(0) \geq f(x) \geq f(\pi) \Leftrightarrow \sin \pi - \pi - 1 \leq f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\pi - 2 \leq f(x) \leq 0.$$

Η f έχει σύνολο τιμών το $[-\pi - 2, 0]$.

Δ2. $\sin x < x + 1 \Leftrightarrow \sin x - x - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \stackrel{f \searrow [0, \pi]}{\Leftrightarrow} x \in (0, \pi]$.

$$\Delta 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x + \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x - 1}{x + \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x - x - 1}{x}}{\frac{x + \eta \mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x - 1}{x} - 1}{1 + \frac{\eta \mu x}{x}} = \frac{0 - 1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

Δ4. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$, άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Η αντίστροφη f^{-1} έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f , δηλαδή το $[0, \pi]$.

Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[-\pi-2, 0]$, η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει λύση μόνο όταν $f(x) = f^{-1}(x) = 0$ άρα μοναδική λύση η $x = 0$.

$$\Delta 5. \sin x \geq \ln(x+1) + x + 1 \Leftrightarrow \sin x - x - 1 \geq \ln(x+1) \Leftrightarrow f(x) \geq \ln(x+1) \quad (3)$$

Από το Δ1 γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι $-\pi-2 \leq f(x) \leq 0$. Όμως $1+x \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) \geq 0$, άρα $f(x) \leq \ln(x+1)$ (4).

Από τις (3), (4) προκύπτει ότι $f(x) = \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.